die entweder sich unbegrenzt fortsetzen läßt oder einmal abbricht, indem $\mathfrak{P}_n(x) = 1$ wird. Nun folgt, indem man mit den in der Kette (3) auftretenden a_ν, r_ν den Kettenbruch (1) bildet, aus (3) die formale Identität

$$(4)\qquad \mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x^{r_1}|}{|1} + \cdots + \frac{a_\lambda x^{r_\lambda}|}{|\mathfrak{P}_\lambda(x)} = \frac{\mathfrak{P}_\lambda(x) A_{\lambda-1}(x) + a_\lambda x^{r_\lambda} A_{\lambda-2}(x)}{\mathfrak{P}_\lambda(x) B_{\lambda-1}(x) + a_\lambda x^{r_\lambda} B_{\lambda-2}(x)},$$

oder also

$$\mathfrak{P}_0(x) - \frac{A_{\lambda-1}(x)}{B_{\lambda-1}(x)} = \frac{(-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \cdots a_\lambda x^{r_1+r_2+\cdots+r_\lambda}}{B_{\lambda-1}(x)[\mathfrak{P}_\lambda(x) B_{\lambda-1}(x) + a_\lambda x^{r_\lambda} B_{\lambda-2}(x)]}.$$

Das besagt aber, daß die Taylorsche Reihe für den Näherungsbruch $\frac{A_{\lambda-1}(x)}{B_{\lambda-1}(x)}$ mit der Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ bis zur Potenz $x^{r_1+\cdots+r_\lambda-1}$ übereinstimmt, so daß die Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ den Kettenbruch zum korrespondierenden hat; es gilt also

$$\mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \frac{a_1 x^{r_1}|}{|1} + \frac{a_2 x^{r_2}|}{|1} + \cdots.$$

Ebenso ergibt sich aber auch, indem man die Kette (3) erst mit der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Gleichung beginnen läßt,

$$\mathfrak{P}_\nu(x) \sim 1 + \frac{a_{\nu+1} x^{r_{\nu+1}}|}{|1} + \frac{a_{\nu+2} x^{r_{\nu+2}}|}{|1} + \cdots.$$

Somit erhalten wir den

Satz 3.5. *Zu jeder Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x)$ mit dem konstanten Glied 1 gibt es einen und nur einen korrespondierenden Kettenbruch. Man findet ihn, indem man durch sukzessive Reziprokenbildung die formale Gleichungskette*

$$(\mathrm{A})\quad \mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x^{r_1}}{\mathfrak{P}_1(x)},\quad \mathfrak{P}_1(x) = 1 + \frac{a_2 x^{r_2}}{\mathfrak{P}_2(x)},\quad \mathfrak{P}_2(x) = 1 + \frac{a_3 x^{r_3}}{\mathfrak{P}_3(x)}, \ldots$$

aufstellt, die entweder unendlich ist oder mit einer Formel $\mathfrak{P}_n(x) = 1$ endet. Es gilt dann die Formel

$$(\mathrm{B})\qquad \mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \frac{a_1 x^{r_1}|}{|1} + \frac{a_2 x^{r_2}|}{|1} + \cdots$$

und allgemeiner (im Fall der Endlichkeit nur für $\nu < n$)

$$(\mathrm{C})\qquad \mathfrak{P}_\nu(x) \sim 1 + \frac{a_{\nu+1} x^{r_{\nu+1}}|}{|1} + \frac{a_{\nu+2} x^{r_{\nu+2}}|}{|1} + \cdots.$$

Umgekehrt zieht die Korrespondenzformel (B) *stets die Existenz einer Kette von Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x)$, ... nach sich, für die die formalen Identitäten* (A) *bestehen. Zugleich gelten dann die Formeln* (C).

Insbesondere erkennen wir hieraus

Satz 3.6. *Aus irgend zwei der drei Formeln*

$$\mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \frac{a_1 x^{r_1}|}{|1} + \frac{a_2 x^{r_2}|}{|1} + \frac{a_3 x^{r_3}|}{|1} + \cdots,$$

$$\mathfrak{P}_1(x) \sim 1 + \frac{a_2 x^{r_2}|}{|1} + \frac{a_3 x^{r_3}|}{|1} + \cdots,$$

$$\mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x^{r_1}}{\mathfrak{P}_1(x)}$$

folgt stets die dritte. Dabei ist es gleichgültig, ob die Kettenbrüche unendlich sind oder endlich und mit dem gleichen Glied schließend.

Schließlich gilt noch als Umkehrung von Satz 3.1 der

Satz 3.7. *Ist $\mathfrak{P}_0(x)$ die Taylorsche Reihe für eine rationale Funktion, so ist der korrespondierende Kettenbruch endlich.*

Beweis. Sei $\mathfrak{P}_0(x) = \frac{P_0(x)}{P_1(x)}$, wo $P_0(x)$ und $P_1(x)$ Polynome mit dem konstanten Glied 1 sind. Aus $\mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x^{r_1}}{\mathfrak{P}_1(x)}$ folgt dann

$$(5)\qquad \mathfrak{P}_1(x) = \frac{a_1 x^{r_1}}{\mathfrak{P}_0(x) - 1} = \frac{a_1 x^{r_1} P_1(x)}{P_0(x) - P_1(x)} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)},$$

wo auch $P_2(x)$ ein Polynom mit dem konstanten Glied 1 ist. Durch Fortsetzung des Verfahrens kommt allgemein

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \frac{P_\nu(x)}{P_{\nu+1}(x)},$$

wo alle Polynome $P_\nu(x)$ das konstante Glied 1 haben. Ist p_ν der Grad von $P_\nu(x)$, so folgt aus (5)

$$p_2 \leqq \operatorname{Max}(p_0, p_1) - r_1 \leqq \operatorname{Max}(p_0, p_1) - 1,$$

und analog ist auch $p_3 \leqq \operatorname{Max}(p_1, p_2) - 1 \leqq \operatorname{Max}(p_0, p_1) - 1$; also schließlich

$$\operatorname{Max}(p_2, p_3) \leqq \operatorname{Max}(p_0, p_1) - 1.$$

Ebenso ist dann auch

$$\operatorname{Max}(p_4, p_5) \leqq \operatorname{Max}(p_2, p_3) - 1 \leqq \operatorname{Max}(p_0, p_1) - 2,$$

usw. Aus dieser (nicht notwendig monotonen) Gradabnahme erkennt man, daß der Prozeß einmal zu Ende gehen muß.

III. Die bisherigen Entwicklungen stammen von *Leighton and Scott* **1**. Das in Satz 3.5 angegebene Verfahren, um zu einer Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x)$ den korrespondierenden Kettenbruch zu finden, beweist zwar die Existenz, ist aber praktisch sehr mühsam, da man fortgesetzt zu Potenzreihen die reziproken Reihen bilden muß. Nach *E. Frank* **1** läßt es sich durch ein wesentlich einfacheres ersetzen, bei dem man ohne jede Division auskommt. Zunächst ist nämlich $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = 1$, und $a_1 x^{r_1}$ ist das erste nicht verschwindende Glied in der gegebenen Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x) - 1$. Die folgenden Teilzähler des korrespondierenden Kettenbruches ergeben sich dann rekurrent aus dem

Satz 3.8. *Wenn von dem korrespondierenden Kettenbruch einer Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x)$ die Teilzähler $a_1 x^{r_1}, \ldots, a_n x^{r_n}$ und folglich auch die Näherungsnenner $B_1(x), \ldots, B_n(x)$ bereits bekannt sind, so erhält man den nächsten Teilzähler $a_{n+1} x^{r_{n+1}}$ einfach dadurch, daß man in der Produktreihe $\mathfrak{P}_0(x) B_n(x)$ das erste Glied sucht, dessen Exponent größer als $r_1 + \cdots + r_n$ ist. Dieses Glied ist gleich*

$$(-1)^n a_1 \cdots a_n a_{n+1} x^{r_1+\cdots+r_n+r_{n+1}},$$

so daß man mit ihm sofort a_{n+1} und r_{n+1} und dann aus der Formel $B_{n+1} = B_n + a_{n+1} x^{r_{n+1}} B_{n-1}$ auch $B_{n+1}(x)$ kennt. (*E. Frank* **1**.)

Beweis. Die Entwicklung von $\mathfrak{P}_0(x) - \frac{A_n(x)}{B_n(x)}$ beginnt nach Formel (2) für $\lambda = n + 1$ mit dem Glied

$$(-1)^n a_1 \cdots a_n a_{n+1} x^{r_1+\cdots+r_n+r_{n+1}}.$$