Lösung Aufgabe 1:

i	α^i	α^4	α^3	α^2	α^1	α^0
0	1	0	0	0	0	1
1	α	0	0	0	1	0
2	α^2	0	0	1	0	0
3	α^3	0	1	0	0	0
4	α^4	1	0	0	0	0
5	α^5	0	1	1	1	1
6	α^6	1	1	1	1	0
7	α^7	1	0	0	1	1
8	α^8	0	1	0	0	1
9	α^9	1	0	0	1	0
10	α^{10}	0	1	0	1	1
11	α^{11}	1	0	1	1	0
12	α^{12}	0	0	0	1	1
13	α^{13}	0	0	1	1	0
14	α^{14}	0	1	1	0	0
15	α^{15}	1	1	0	0	0
16	α^{16}	1	1	1	1	1
17	α^{17}	1	0	0	0	1
18	α^{18}	0	1	1	0	1
19	α^{19}	1	1	0	1	0
20	α^{20}	1	1	0	1	1
21	α^{21}	1	1	0	0	1
22	α^{22}	1	1	1	0	1
23	α^{23}	1	0	1	0	1
24	α^{24}	0	0	1	0	1
25	α^{25}	0	1	0	1	0
26	α^{26}	1	0	1	0	0
27	α^{27}	0	0	1	1	1
28	α^{28}	0	1	1	1	0
29	α^{29}	1	1	1	0	0
30	α^{30}	1	0	1	1	1

Lösung Aufgabe 2:

$$\alpha^{14} + \alpha^{3} = \alpha^{2}$$

$$\alpha^{14} + \alpha^{18} = \alpha^{0} = 1$$

$$\alpha^{14} + \alpha^{28} = \alpha$$

Lösung Aufgabe 3:

$$\alpha^{19} \cdot \alpha^{3} = \alpha^{22}$$

$$\alpha^{13} \cdot \alpha^{18} = \alpha^{0} = 1$$

$$\alpha^{21} \cdot \alpha^{25} = \alpha^{15}$$

Lösung Aufgabe 4:

a.) Für die Mindestdistanz gilt $d \geq$ entworfende Distanz $= 11$.

b.)

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, 2, 4, 8, 16\} \\ C_3 &= \{3, 6, 12, 24, 17\} \\ C_5 &= \{5, 10, 20, 9, 18\} \\ C_7 &= \{7, 14, 28, 25, 19\} \end{aligned}$$

c.) Es gilt $k = 11$.

d.) $g(x) = m_1(x) \cdot m_3(x) \cdot m_5(x) \cdot m_7(x)$.

e.) Das Minimalpolynom $m_1(x)$ ist gleich dem primitiven Polynom mit dem der Körper konstruiert wurde.

$$m_1(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$m_3(x) = (x - \alpha^3) \cdot (x - \alpha^6) \cdot (x - \alpha^{12}) \cdot (x - \alpha^{24}) \cdot (x - \alpha^{17}).$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{Koeffizient bei } x^5: & & 1 \\
\text{Koeffizient bei } x^4: & & \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^{12} + \alpha^{24} + \alpha^{17} = 1\ . \\
\text{Koeffizient bei } x^3: & & \alpha^{3+6} + \alpha^{3+12} + \alpha^{3+24} + \alpha^{3+17} + \\
 & & \alpha^{6+12} + \alpha^{6+24} + \alpha^{6+17} + \\
 & & \alpha^{12+24} + \alpha^{12+17} + \alpha^{24+17} \\
 & = & \alpha^9 + \alpha^{15} + \alpha^{27} + \alpha^{20} + \alpha^{18} + \\
 & & \alpha^{30} + \alpha^{23} + \alpha^5 + \alpha^{29} + \alpha^{10} = 1\ . \\
\text{Koeffizient bei } x^2: & & \alpha^{12+24+17} + \alpha^{6+24+17} + \alpha^{6+12+17} + \alpha^{6+12+24} + \\
 & & \alpha^{3+24+17} + \alpha^{3+12+17} + \alpha^{3+12+24} + \\
 & & \alpha^{3+6+17} + \alpha^{3+6+24} + \alpha^{3+6+12} \\
 & = & \alpha^{22} + \alpha^{16} + \alpha^4 + \alpha^{11} + \alpha^{13} + \\
 & & \alpha^1 + \alpha^8 + \alpha^{26} + \alpha^2 + \alpha^{21} = 0\ . \\
\text{Koeffizient bei } x: & & \alpha^{6+12+24+17} + \alpha^{3+12+24+17} + \alpha^{3+6+24+17} + \\
 & & \alpha^{3+6+12+17} = \alpha^{28} + \alpha^{25} + \alpha^{19} + \alpha^7 + \alpha^{14} = 1\ . \\
\text{Koeffizient bei } x^0: & & 1\ .
\end{array}$$

$$\Rightarrow m_3(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x + 1\ .$$

Lösung Aufgabe 5: Mit $z = x/\alpha^{13}$ folgt

$$x^2 + x + \alpha^8 = 0.$$

Mit der für den Körper relevanten Lösungsformel

$$x_1 = \gamma \cdot \alpha^{14} + \gamma^2 \cdot \alpha^8 + \gamma^4 \cdot \alpha^9,$$

wobei $\gamma = \alpha^8$ (siehe Vorlesung vom 17.11.2006, Folie 15) folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha^{8+14} + \alpha^{16+8} + \alpha^{32+9} \\ &= \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha^{11} \\ \Rightarrow x_1 &= \alpha^{12} \\ \Rightarrow x_2 &= x_1 + 1 = \alpha^{11} \\ \Rightarrow z_1 &= \alpha^{12}/\alpha^{13} = \alpha^{14} \\ \Rightarrow z_2 &= \alpha^{11}/\alpha^{13} = \alpha^{13} \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} n &= |L| = 14 \\ d &\geq 5 \\ k &\geq 6. \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 7:

a.)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{r_1}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e_1} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \mathbf{c_1} = (1, 1, 3, 4, 5, 6, 1, 2)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{r_2}^\top = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e_2} = (0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$
$$\Rightarrow \mathbf{c_2} = (6, 6, 4, 3, 2, 1, 6, 5)$$

c.)

$$\mathbf{c_a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 0)$$
$$\mathbf{c_b} = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0)$$

Lösung Aufgabe 8:
a.)

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{z-\alpha_0} + \frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{1}{z-\alpha_4} + \frac{1}{z-\alpha_7} \\ &= \alpha^{12}z + \alpha^{12} + \alpha^{12}z + \alpha^{9}z + \alpha^{8} + \alpha^{8}z + \alpha^{6} \\ &= (\alpha^9 + \alpha^8)z + (\alpha^{12} + \alpha^8 + \alpha^6) \\ \Rightarrow S(z) &= \alpha^{12} \cdot z + \alpha^5. \end{aligned}$$

b.)

$$(z^2 + z + \alpha^3) : (\alpha^{12}z + \alpha^5) = (\alpha^3 z + \alpha^5) \text{ Rest } \alpha^{12}.$$

d.h.

$$\alpha^{12} = 0 \cdot G(z) + (\alpha^3 z + \alpha^5) \cdot S(z)$$
$$\Rightarrow 1 \equiv (\alpha^6 z + \alpha^8) \cdot S(z) \bmod G(z).$$
$$\Rightarrow T(z) = \alpha^6 \cdot z + \alpha^8.$$

c.)

$$T(z) + z = \alpha^{13} \cdot z + \alpha^8 \Rightarrow R(z) = \sqrt{\alpha^8 + z \cdot \alpha^{13}} \bmod G(z).$$

$$\begin{aligned} R(z) &= \alpha^4 + w(z) \cdot \alpha^{14} \\ &= \alpha^4 + (z + \alpha^9) \cdot \alpha^{14} \\ \Rightarrow R(z) &= \alpha^{14} \cdot z + \alpha^5. \end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned} a(z) &= \alpha^{14} \cdot z + \alpha^5 \\ b(z) &= 1 \\ \sigma(z) &= a(z)^2 + z \cdot b(z)^2 = \alpha^{13}z^2 + \alpha^{10} + z \\ \Rightarrow \sigma(z) &= \alpha^{13}z^2 + z + \alpha^{10}. \end{aligned}$$

e.) Die Nullstellen von $\sigma(z)$ sind (siehe Aufgabe 5) α^{13} und α^{14}, d.h. α_{14} und α_{15}.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{e} &= (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1) \\ \Rightarrow \mathbf{c} &= (1,1,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,1,1) \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 9:

b.) ist richtig.

Lösung Aufgabe 10:

a.) $d_H = 5$.

b.) $d_{Lee} = 12$.

Lösung Aufgabe 11:

a.) Richtig.

b.) Richtig.

c.) Falsch.

d.) Richtig.