Lösung Aufgabe 1:

i	α^i	α^4	α^3	α^2	α^1	α^0
0	1	0	0	0	0	1
1	α	0	0	0	1	0
2	α^2	0	0	1	0	0
3	α^3	0	1	0	0	0
4	α^4	1	0	0	0	0
5	α^5	0	1	0	0	1
6	α^6	1	0	0	1	0
7	α^7	0	1	1	0	1
8	α^8	1	1	0	1	0
9	α^9	1	1	1	0	1
10	α^{10}	1	0	0	1	1
11	α^{11}	0	1	1	1	1
12	α^{12}	1	1	1	1	0
13	α^{13}	1	0	1	0	1
14	α^{14}	0	0	0	1	1
15	α^{15}	0	0	1	1	0
16	α^{16}	0	1	1	0	0
17	α^{17}	1	1	0	0	0
18	α^{18}	1	1	0	0	1
19	α^{19}	1	1	0	1	1
20	α^{20}	1	1	1	1	1
21	α^{21}	1	0	1	1	1
22	α^{22}	0	0	1	1	1
23	α^{23}	0	1	1	1	0
24	α^{24}	1	1	1	0	0
25	α^{25}	1	0	0	0	1
26	α^{26}	0	1	0	1	1
27	α^{27}	1	0	1	1	0
28	α^{28}	0	0	1	0	1
29	α^{29}	0	1	0	1	0
30	α^{30}	1	0	1	0	0

Lösung Aufgabe 2:

$$\alpha^{14} + \alpha^{3} = \alpha^{26}$$

$$\alpha^{14} + \alpha^{18} = \alpha^{8}$$

$$\alpha^{14} + \alpha^{28} = \alpha^{15}$$

Lösung Aufgabe 3:

$$\alpha^{11} \cdot \alpha^{14} = \alpha^{25}$$

$$\alpha^{29} \cdot \alpha^{3} = \alpha^{1} = \alpha$$

$$\alpha^{21} \cdot \alpha^{-25} = \alpha^{27}$$

Lösung Aufgabe 4:

a.) Für die Mindestdistanz gilt $d \geq$ entworfende Distanz $= 13$.

b.)

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{1, 2, 4, 8, 16, 32\} \\
C_3 &= \{3, 6, 12, 24, 48, 33\} \\
C_5 &= \{5, 10, 20, 40, 17, 34\} \\
C_7 &= \{7, 14, 28, 56, 49, 35\} \\
C_9 &= \{9, 18, 36\} \\
C_{11} &= \{11, 22, 44, 25, 50, 37\}
\end{aligned}$$

c.) Es gilt $k = 30$.

d.) $g(x) = m_1(x) \cdot m_3(x) \cdot m_5(x) \cdot m_7(x) \cdot m_9(x) \cdot m_{11}(x)$.

e.) Das Minimalpolynom $m_1(x)$ ist gleich dem primitiven Polynom mit dem der Körper konstruiert wurde.

$$m_1(x) = x^6 + x + 1$$

$$m_3(x) = (x - \alpha^9) \cdot (x - \alpha^{18}) \cdot (x - \alpha^{36}).$$

Koeffizient bei x^3:	1
Koeffizient bei x^2:	$\alpha^9 + \alpha^{18} + \alpha^{36} = 1$
Koeffizient bei x^0:	1 .

Daß der Koeffizent bei x gleich 0 ist folgt ohne Rechnung, da das Polynom $x^3 + x^2 + x + 1$ durch $x + 1$ teilbar ist und somit nicht Minimalpolynom von α^9 sein kann.

$$\Rightarrow m_9(x) = x^3 + x^2 + 1 \ .$$

Lösung Aufgabe 5: Mit $z = x/\alpha^{13}$ folgt

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Hieraus ergeben sich die Lösungen

$$x_1 = \alpha^5 \qquad x_2 = \alpha^{10},$$

und somit

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha^{5-13} = \alpha^7 \\ z_2 &= \alpha^{10-13} = \alpha^{12}. \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} n &= |L| = 62 \\ d &\geq 5 \\ k &\geq 50. \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 7:

a.)

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

b.)

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_1^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e_1} = (0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{c_1} = (1,10,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_2^\top = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{e_2} = (0,0,0,0,0,0,6,0,0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{c_2} = (0,1,0,0,0,0,5,5,0,0,0,0)$$

c.)

$$\mathbf{c_a} = (1,2,3,4,0,0,0,0,0,0,1,3)$$

$$\mathbf{c_b} = (2,2,2,2,0,0,0,0,0,0,3,2).$$

Lösung Aufgabe 8:
a.)

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{1}{z-\alpha_4} + \frac{1}{z-\alpha_9} + \frac{1}{z-\alpha_{15}} \\ &= \alpha^9 z + \alpha^8 + \alpha^3 z + \alpha^5 + \alpha^9 z + \alpha^{12} \\ &= (\alpha^9 + \alpha^3 + \alpha^9) z + (\alpha^8 + \alpha^5 + \alpha^{12}) \\ \Rightarrow S(z) &= \alpha^3 \cdot z + \alpha^6 \,. \end{aligned}$$

b.)

$$(z^2 + z + \alpha^3) : (\alpha^3 z + \alpha^6) = (\alpha^{12} z + \alpha^{11}) \ \text{ Rest } \alpha^6.$$

d.h.

$$\alpha^6 = 0 \cdot G(z) + (\alpha^{12} z + \alpha^{11}) \cdot S(z)$$
$$\Rightarrow 1 \equiv (\alpha^6 z + \alpha^5) \cdot S(z) \bmod G(z).$$
$$\Rightarrow T(z) = \alpha^6 \cdot z + \alpha^5.$$

c.)

$$T(z) + z = \alpha^{13} \cdot z + \alpha^5 \Rightarrow R(z) = \sqrt{\alpha^5 + z \cdot \alpha^{13}} \bmod G(z).$$

$$\begin{aligned} R(z) &= \alpha^{10} + w(z) \cdot \alpha^{14} \\ &= \alpha^{10} + (z + \alpha^9) \cdot \alpha^{14} \\ \Rightarrow R(z) &= \alpha^{14} \cdot z + \alpha. \end{aligned}$$

d.)

$$\begin{aligned} a(z) &= \alpha^{14} \cdot z + \alpha \\ b(z) &= 1 \\ \sigma(z) &= a(z)^2 + z \cdot b(z)^2 = \alpha^{13} z^2 + \alpha^2 + z \\ \Rightarrow \sigma(z) &= \alpha^{13} z^2 + z + \alpha^2. \end{aligned}$$

e.) Die Nullstellen von $\sigma(z)$ sind (siehe Aufgabe 5) α^7 und α^{12}, d.h. α_8 und α_{13}.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{e} &= (0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0) \\ \Rightarrow \mathbf{c} &= (0,0,0,0,1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,1) \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 9:
a.)

$$\begin{aligned} S_1 &= r(\alpha) = 4 \cdot 2^2 + 5 \equiv 10 \bmod 11 \\ S_3 &= r(\alpha^3) = 4 \cdot 8^2 + 5 \equiv 8 \bmod 11 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \tilde{S}(z) = 10z + 8z^3.$$

b.)

$$\begin{aligned} U_1 &= -S_1 = 1 \\ U_3 &= \frac{-S_3 + U_1^2 S_1}{3} = \frac{3 + 1 \cdot 10}{2} \equiv \frac{2}{3} \equiv 8 \bmod 11 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow U(z) = z + 8z^3.$$

c.)

$$\begin{aligned} 1 + T(z^2) &= \frac{1}{1 + z^2 + 8z^4} = 1 + (-z^2 - 8z^4) + (-z^2 - 8z^4)^2 + \ldots \\ &= 1 + 10z^2 - 8z^4 + z^4 + \ldots \\ &= 1 + 10z^2 + 4z^4 + \ldots \end{aligned}$$
$$\Rightarrow 1 + T(z) = 1 + 10z + 4z^2 + z^3(\ldots).$$

d.)
Durchführen des erweiterten Euklidschen Algorithmus führt zu

$$6z + 2 = 1 \cdot z^3 - (3z + 9) \cdot (4z^2 + 10z + 1) \ .$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 6z + 2 &\equiv (8z + 2) \cdot (4z^2 + 10z + 1) \bmod z^3 \\ \Rightarrow \omega(z) = 6z + 2 & \qquad \phi(z) = 8z + 2 \ . \end{aligned}$$

e.)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \omega(z^2) = 6z^2 + 2 \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\phi(z^2) - \hat{\sigma}(z)}{z} = \frac{8z^2 + 2 - 6z^2 - 2}{z} = 2z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma(z) = 6z^2 + 2z + 2 \ .$$

f.) Das Polynom $\sigma(z)$ hat eine doppelte Nullstelle bei $z = -2$. Da $-2 = -\alpha = \alpha^6$ und $6 \equiv 4 \bmod 10$, liegt der doppelte Fehler an der 4. Stelle mit Fehlerwert 2.

$$\begin{aligned} e(x) &= 2x^4 \\ c(x) &= 9x^4 + 4x^2 + 5 \ . \end{aligned}$$