Relativistische Bahnkurven und Cauerfilter

Dr.-Ing. Klaus Huber
Sesenheimer Str. 21
10627 Berlin
klaus.huber@o2online.de

Zarm
Universität Bremen
Am Fallturm
28359 Bremen
16.12.2010

Übersicht:

- Tiefpassfilter
- Orbitgleichung
- Exakte Lösung der Orbitgleichung
- Orbit von Photonen
- Weierstrass Theorie
- Geschlossene Orbits
- Orbit von Elektron um Proton
- Abschließende Bemerkungen und Ausblick

Tiefpassfilter

läßt Signale mit Frequenz $\omega < \omega_s$ passieren

sperrt Signale mit Frequenz $\omega > \omega_s$.

In Praxis: Vorgabe einer Schablone

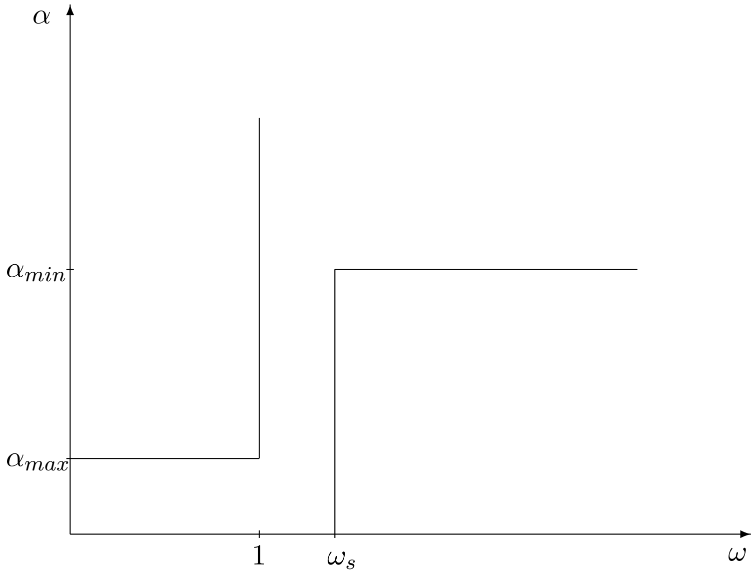

Fig.1

Hochpass-, Bandpass- und Bandsperrefilter werden durch einfache Transformationen des Tiefpassfilters erhalten.

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

$H(s)$: Übertragungsfunktion

$X(s)$: Laplacetrf. der Eingangszeitfunktion

$Y(s)$: Laplacetrf. der Ausgangszeitfunktion

(quadrierter) Amplitudengang:

$$H(j\omega) \cdot H(-j\omega) \stackrel{!}{=} \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot F_n(\omega)^2}$$

Butterworth Filter: $F_n(\omega) = \omega^n$

Tschebyscheff Filter:

$$F_n(\omega) = T_n(\omega) = \cos(n \arccos \omega)$$

Cauer Filter:

$$F_n(\omega) = R_n(\omega) = cd(n \cdot f(\omega)) \stackrel{!}{=} cd(C\Theta)$$

$cd(x)$ ist eine sogenannte Jacobi-elliptische Funktion (Cauerfilter enthält Butterworth- und Tschebyscheffilter als Spezialfälle).

Ausgangspunkt: *Orbitgleichung*

$$u'' + u = \alpha + 3\beta \cdot u^2 \text{ mit } u = 1/r(\Theta),$$

wobei α und β Konstanten sind, die je nach Anwendungsfall zu wählen sind:

- Klassische Planetenbahn: $\alpha = \frac{G_G}{H^2}$, $\beta = 0$
- Relativistische Bahn: $\alpha = \frac{G_G}{H^2}$, $\beta = \frac{G_G}{c^2}$
- Photon um Masse m: $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\gamma m}{c^2}$
- Elektron um Proton
- Andere (Elementar-)Teilchen

wobei
γ: Gravitationskonstante,
c: Lichtgeschwindigkeit,
Θ: Winkel,
$G_G = \gamma(M_S + m_p)$,
$H = r^2\dot{\Theta}$.

Exakte Lösung der Orbitgleichung

Im Prinzip ist Lösung in Buch von Lawden zu finden:

$$r = \frac{1}{A+B\cdot sn^2(C\Theta)}$$

Problem: Die Konstanten A, B und C sind nur näherungsweise bestimmt worden (dies war für die Bestimmung der Periheldrehung von Merkur ausreichend).

Lösung hat gleiche Gestalt wie Amplitudengang der Cauerfilter, da gilt:

$$sn(z+K,k) = cd(z,k)$$

Interessant: Die Konstanten A, B und C können verhältnismäßig leicht exakt bestimmt werden.

Mit dem Ansatz $u = A+Bsn^2(C\Theta,k)$ folgt nach Termvergleich und etwas Rechnen die exakte Lösung.

Exakte Lösung

$$r = \frac{1}{A + B \cdot sn^2(C\Theta, k)}$$

wobei

$$A = \frac{1}{6\beta} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{1 - 12\alpha\beta}{k^4 - k^2 + 1}}(k^2 + 1)\right)$$

$$B = \frac{k^2}{2\beta} \cdot \sqrt{\frac{1 - 12\alpha\beta}{k^4 - k^2 + 1}}$$

$$C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1 - 12\alpha\beta}{k^4 - k^2 + 1}} \; .$$

Interessant: Die Konstante C ist invariant gegenüber der Transformation $k^2 \to k'^2 = 1 - k^2$.

Die Perihelverschiebung $\Delta\Theta$ folgt somit zu:

$$\Delta\Theta = \frac{2K}{C} - 2\pi = 4K \sqrt[4]{\frac{k^4 - k^2 + 1}{1 - 12\alpha\beta}} - 2\pi \; .$$

Benutzung von $\epsilon^2 = B/A$ ($\leftarrow$ Cauerfilter)

$$r = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon^2 \cdot sn^2(C\Theta)}$$

dann folgt

$$\Rightarrow 1 - 12\alpha\beta = \frac{k^4 - k^2 + 1}{(\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2}k^2 + 1)^2},$$

und

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{k^2/\epsilon^2}{\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2}k^2 + 1} \\ B &= \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{k^2}{\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2}k^2 + 1} \\ C &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2}k^2 + 1}} \ , \end{aligned}$$

sowie

$$\Delta\Theta = 4K\sqrt{\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2}k^2 + 1} - 2\pi \ .$$

Bahnkurve somit gegeben durch

$$r = 2\beta \cdot \frac{3 + \epsilon^2 + \frac{\epsilon^2}{k^2}}{1 + \epsilon^2 \cdot sn^2(C\Theta)} \ .$$

Der Wert von k oder ϵ kann gegen Null gehen und 2β mal dem Zähler kann auf gewünschte Werte gesetzt werden ($\rightarrow$ Tschebyscheff- und Butterworthfilter als Spezialfälle von Cauer Filtern).

Für Planetenbewegung ergibt sich

$$r = r_{\text{Schwarzschild}} \cdot \frac{3 + \epsilon^2 + \frac{\epsilon^2}{k^2}}{1 + \epsilon^2 \cdot sn^2(C\Theta)} \ ,$$

wobei $r_{\text{Schwarzschild}} = \frac{2\gamma(M_S + m_p)}{c^2}$.

Orbit von Photonen
Mit $\alpha = 0$ und $\beta = \gamma m/c^2$ folgt

$$\left(\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2} \cdot k^2 + 1\right)^2 = k^4 - k^2 + 1 \ ,$$

und somit

$$k^2 = 0 \quad \text{oder} \quad k^2 = -\frac{\epsilon^2(\epsilon^2+2)}{(2\epsilon^2+3)} \ .$$

Enthält Kreisbahn mit Radius

$$r = 3\beta = 3\gamma \cdot m/c^2$$

Negative oder komplexe Werte von k sind kein Problem (z.B. $k = i = \sqrt{-1}$ entspricht dem *Sinus Lemniscatus*).
Mit

$$k = i \cdot \sqrt{\frac{\epsilon^2(\epsilon^2+2)}{2\epsilon^2+3}} = i \cdot \kappa$$

sowie

$$sn(u, i\kappa) = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2}} \cdot sd(\sqrt{1+\kappa^2}\, u, \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}})$$

(entsprechend bei cd)

folgt neuer Modul

$$\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon^2 \cdot (\epsilon^2+2)}{(\epsilon^2+1)\cdot(\epsilon^2+3)}}\,,$$

und der zusätzliche Faktor im Argument der ellipt. Funktion lautet

$$\sqrt{1+\kappa^2} = \sqrt{\frac{(\epsilon^2+1)(\epsilon^2+3)}{2\epsilon^2+3}}\,.$$

Schließlich folgt mit $cn(iu,k) = 1/cn(u,k')$ die Orbitgleichung in Abhängigkeit von β, ϵ und Θ (passt nicht auf Folie).

Aus Endformel folgt die Ablenkung von Licht

$$\Rightarrow \Delta\Theta_L = \frac{2\,(\epsilon^2+2)}{\epsilon^4+3\epsilon^2+3}\,.$$

wobei $\Delta\Theta_L = 4\gamma m/(c^2 r_x)$
und $r_x = \frac{2\gamma \cdot m}{c^2} \cdot \frac{\epsilon^4+3\epsilon^2+3}{\epsilon^2+2}$.

Weierstrass Theorie

Es gilt

$$\wp(\Theta) = \frac{e_1 - e_3}{sn^2(\sqrt{e_1 - e_3}\Theta)} + e_3 \ ,$$

oder

$$\wp(\Theta) = \frac{C^2}{sn^2(C\Theta)} - \frac{(1 + k^2) \cdot C^2}{3} \ ,$$

mit $C \stackrel{!}{=} \sqrt{e_1 - e_3}$.

$$\Theta = \int_{\infty}^{\wp(\Theta)} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2\, y - g_3}} \ ,$$

g_2 und g_3 sind die Weierstrass Invarianten, wobei gilt $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\,\wp - g_3$. Die Nullstellen des Polynoms $4y^3 - g_2\, y - g_3$ folgen zu

$$\begin{aligned} e_1 &= -\frac{k^2 - 2}{3} C^2 \\ e_2 &= \frac{2k^2 - 1}{3} C^2 \\ e_3 &= -\frac{k^2 + 1}{3} C^2 \ , \end{aligned}$$

und die Invarianten folgen zu

$$g_2 = \frac{1}{12} - \alpha\beta \ ,$$

und

$$g_3 = \frac{(k^2+1)(k^2-2)(k^2-\frac{1}{2})}{2^3 \cdot 3^3} (\frac{1-12\alpha\beta}{k^4-k^2+1})^{\frac{3}{2}}.$$

Hieraus läßt sich die Diskriminante $g_2^3 - 27g_3^2$ und insbesondere die absolute Invariante $g_2^3/(27g_3^2)$ berechnen:

$$\frac{g_2^3}{27\, g_3^2} = \frac{(k^4-k^2+1)^3}{(k^2+1)^2 \cdot (k^2-2)^2 \cdot (k^2-\frac{1}{2})^2} \ .$$

Die Abbildungen:

$k \to k' = \sqrt{1-k^2}$ und
$k \to \frac{1}{k}$

lassen die absolute Invariante unverändert.

Geschlossene Orbits

Für $L \cdot \Delta\Theta = 2\pi$, wobei L ganze Zahl.

Allgemeiner: $L \cdot \Delta\Theta = l \cdot 2\pi$, d.h.

$$L \cdot (4K\sqrt{\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2}k^2+1} - 2\pi) = l \cdot 2\pi \ .$$

Aufgelöst nach ϵ^2:

$$\epsilon^2 = \frac{3\,k^2}{(\frac{\pi}{2K})^2\,(1+\frac{l}{L})^2 - (k^2+1)} \ .$$

($\rightarrow$ Vereinfachung für Spezialfälle wie kleines k, Kreisbahn, L sehr groß, etc..)

Interessant für Berechnung von exakten oder angenäherten Lösungen für L, l :

Kettenbruchentwicklung von

$$\frac{L+l}{L} = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{3+\epsilon^2}{\epsilon^2}k^2+1}$$

beziehungsweise

$$\frac{L+l}{L} = \frac{2K}{\pi}\sqrt[4]{\frac{k^4-k^2+1}{1-12\alpha\beta}} \ .$$

Kann für komplexes K verallgemeinert werden.
Besonders elegant und in geschlossener Form:
Lemniskatenfall $k = i$, d.h. $sl(z) = sn(z, i)$

$$r = \frac{6\beta}{1 + \epsilon^2 \cdot sl^2(C\Theta)}$$

Gauß: Länge der Lemniskate = Produkt zweier Gaußscher komplexer Zahlen
Satz von Eisenstein:
Sei $a + ib$ eine Gaußsche Primzahl der Form $a + ib \equiv 1 \bmod 2 + 2i$ und $x = sl(z)$ dann gilt:

$$sl((a + ib)z) = x \cdot \frac{W(x^4)}{V(x^4)} \ ,$$

wobei $V(x) = x^{a^2+b^2-1} W(1/x)$ und die Koeffizienten von $W(x)$ Gaußsche ganze Zahlen sind.

Orbit von Elektron um Proton

Neben der Lösung $r = \frac{6\beta}{1 \pm \sqrt{1-12\alpha\beta}}$ gibt es noch weitere Lösungen für Kreisbahnen: Cauer filter $\rightarrow$: Für $\epsilon^2 = k$.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2\beta} \cdot \frac{k^3 + 2k^2 + k}{(k^2 + 3k + 1)^2}.$$

Setze α als Summe von Anteilen aus Gravitation, Coulombfeld und drittem Anteil an: $\alpha = (G_C + G_K + G_G)/H^2$.

Dann folgt:

$$\frac{u_c \cdot H^2}{2\beta} \cdot \frac{k}{(k^2 + 3k + 1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \; ,$$

$$\frac{u_c \cdot H^2}{2\beta} \cdot \frac{k^3}{(k^2 + 3k + 1)^2} \stackrel{!}{=} \gamma(m_P + m_e)m_e \; .$$

D. h. für das Verhältnis von Gravitationskraft und Coulombkraft gilt:

$$\frac{F_G}{F_C} = k^2 \; .$$

Kleine Geschwindigkeiten:

$\Rightarrow k^2 = \frac{4\pi\epsilon_0}{q_e^2} \cdot \gamma(m_P + m_e) m_e \approx 2,1 \cdot 10^{-20}$

bei Einsetzen der Ruhemassen.

Unter Benutzung der Feinstrukturkonstante $\alpha_F = \frac{q_e^2}{2c\epsilon_0 h}$ erhält man

$$\frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha_F \cdot \frac{hc}{2\pi} \ .$$

D.h. für das Produkt der Kräfte [1] bei zwei Teilchen mit Abstand r gilt:

$$F_C \cdot F_G = \frac{k^2 \alpha_F^2}{r^4} \cdot \left(\frac{hc}{2\pi}\right)^2$$

Für α erhält man

$$\alpha = \frac{(k+1)^2}{u_c\, H^2} \cdot \alpha_F \cdot \frac{hc}{2\pi} \ .$$

Korrespondenzprinzip: $u_c \to m_e$.

[1] Aus diesen Gleichungen folgen nach dem Spiegelungsprinzip geschlossene Lösungen für das relativistische Drei-Körper Problem.

Analog bei allgemeiner Bahnkurve:

$$\alpha = \frac{k^2}{4\beta} \cdot \frac{2\epsilon^2 k^2 + 3k^2 + \epsilon^4 + 2\epsilon^2}{((\epsilon^2+3)k^2+\epsilon^2)^2} \ .$$

Entsprechende Zuordnung zu den 4 Kräften:

$\Rightarrow k^2 = F_G/F_C$ wie zuvor.

$$\alpha = \frac{k^2 + \frac{3k^2}{2\epsilon^2} + \frac{\epsilon^2}{2} + 1}{u_c\, H^2} \cdot \alpha_F \cdot \frac{hc}{2\pi} \ ,$$

$$\beta = \frac{\pi\, k^2\, \epsilon^2\, u_c\, H^2}{\alpha_F\, h\, c\, ((\epsilon^2+3)k^2+\epsilon^2)^2} \ .$$

$u_c \rightarrow m_e$

Ggf. andere Zuordnungen, je nach Wert von k^2 und ϵ^2.

Abschließende Bemerkungen und Ausblick

- Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Amplitudengang von Cauerfiltern und relativistischen Bahnkurven.
- Ergebnisse von Cauerfiltern sind sehr nützlich für die Berechnung von Bahnkurven und Spektren.
- Es zeigt sich, daß mit Cauerfiltern Bahnkurven von Teilchen beschrieben werden können, die in die Umlaufbahn einer zentralen Masse gelangen, dort n Umdrehungen durchführen und dann die Umlaufbahn wieder verlassen.
- Zahlreiche Kurven und berühmte geometrische Sätze tauchen bei Cauerfiltern auf, die benutzt werden können, um physikalische Effekte zu erklären.
- Die hyperbolische Geometrie erscheint auf völlig natürliche Weise.

Literatur

[1] K.Huber, 'Cauer Filters', to appear.

[2] D.F.Lawden, 'Elliptic Functions and Applications', Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.

[3] W.I.Smirnow, Lehrgang der höheren Mathematik", Teil III/2, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979, (now Harri Deutsch, Frankfurt).